# Jednodimenzijska difuzijska jednadžba

## 1 Uvod

Gledano matematički, (jednodimenzijska) difuzijska jednadžba je parcijalna diferencijalna jednadžba oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

gdje su $x, t$ nezavisne varijable, $u = u(x, t)$ funkcija dviju varijabla (za koje ima smisla jednadžba) i $D$ pozitivna realna konstanta. To je primjer paraboličke homogene parcijalne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Takva jednadžba ima smisla i ako $D$ nije pozitivna ili ako $D$ nije konstanta već funkcija ovisna o $t$ i (ili) $x$, ali u ovoj ćemo se lekciji držati gornjeg dogovora. Naziv dolazi od toga što se njome modelira proces difuzije unutar tanke šuplje cijevi u nekom sredstvu, primjerice u vodi (i uz odredjene idealne uvjete). Tada $t$ ima značenje vremena, $x$ je duljinska prostorna koordinata (dok se preostale dvije prostorne dimenzije cijevi zanemaruju), $u(x, t)$ je koncentracija difuzijske tvari na položaju $x$ u trenutku $t$, dok je $D$ difuzijski koeficijent. Difuzijski koeficijent ovisi o difuzijskoj tvari, o sredstvu, temperaturi i tlaku, ali su uz ove fiksirane uvjete smatra konstantom (makar općenito ovisi i o koncentraciji ili nekoj od varijabla $x, t$). Problem provodjenja topline analogan je problemu difuzije što se očituje u tome da je jednadžba (1) ujedno i jednodimenzijska toplinska jednadžba (diferencijalna jednadžba provodjenja topline kroz tanku žicu), samo što je tada $u(x, t)$ temperatura na položaju $x$ u trenutku $t$, dok je $D$ toplinska difuznost.

**Upozorenje** 1. Intuitivno, koncentracija (gustoća) je količina mase na jedinicu obujma (masena gustoća) i uobičajeno se mjeri u kilogramima po kubnom metru. U kemijskim razmatranjima u pravilu se misli na molnu koncentraciju (koja se mjeri u molovima po kubnom metru), a može se pojaviti i gustoća koja znači broj čestica na jedinicu obujma. Konstanta $D$

ima dimenziju površine po vremenu i obično se mjeri kvadratnim metrima po sekundi (ali može biti zapisana i drukčije).
(ii) Pri prijelazu na jednodimenzijski slučaj (tanka cijev stalnog vertikalnog presjeka $S$) treba biti oprezan jer se tada pod (masenom) gustoćom često smatra masa po jedinici duljine, a da se to posebno ne naglasi. Intuitivno, to znači da na dijelu od $x$ do $x + \Delta x$, za mali $\Delta x$ ima u trenutku $t$ približno $u(x,t)\Delta x$ mase. Tada je ukupna masa u trenutku $t$ izmedju položaja $x = a$ i $x = b$ (za $a \leq b$) jednaka $\int_a^b u(x,t)dx$ (sl. 1). Ako se pak pošlo od funkcije gustoće mase $u(x,y,z,t)$ koja ne ovisi o $y,z$ koordinatama (jer na svakom presjeku okomitom na $x$-os, stalne površine $S$ gustoća ovisi samo o $x$) i piše $u(x,t)$ umjesto $u(x,y,z,t)$, onda je i dalje riječ o gustoći kao masi po jedinici obujma. Intuitivno, to znači da na dijelu od $x$ do $x + \Delta x$, za mali $\Delta x$ ima u trenutku $t$ približno $Su(x,t)\Delta x$ mase. Tada je ukupna masa u trenutku $t$ izmedju položaja $x = a$ i $x = b$ (za $a \leq b$) jednaka $S\int_a^b u(x,t)dx$ (sl. 2). Ako ne bude drukčije rečeno, stalno će se misliti na ovakvu funkciju gustoće (pa će se u razmatranjima pojavljivati površina $S$). Slično je kad se zanemaruje samo jedna dimenzija, tj. kada se prelazi s trodimenzijskog na dvodimenzijski slučaj.

### 1.1 Generalizacije

Glavna je generalizacija na difuzijsku jednadžbu u prostoru, tj. na jednadžbu oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}), \tag{2}$$

gdje $u(x,y,z,t)$ ima značenje koncentracije na položaju $(x,y,z)$ u trenutku $t$, a $D$ je kao i prije.
Druga važna generalizacija je razmatranje nelinearne difuzijske jednadžbe. Na primjer, u jednodimenzijskom slučaju, jednadžba (1) može se zapisati kao $\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, što se prirodno poopćava na nelinearnu jednadžbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u) \tag{3}$$

gdje funkcija $f$ (ovisna o koncentraciji $u$) dolazi od utjecaja koncentracije na proces difuzije.

## 2 Primjeri rješenja difuzijske jednadžbe (1).

Ta jednadžba ima mnoštvo rješenja od kojih neka imaju a neka nemaju fizikalnu interpretaciju u smislu problema difuzije. Navest ćemo neka od

rješenja (koja je lako provjeriti izravnim deriviranjem ili korištenjem prikladnog kompjutorskog paketa).
(i) $u(x,t) = \cos x \cdot e^{-Dt}$ ili, još općenitije, $u(x,t) = \cos(kx) \cdot e^{-k^2 Dt}$, za svaku realnu konstantu $k$.
(ii) $u(x,t) = \sin x \cdot e^{-Dt}$ ili, još općenitije, $u(x,t) = \sin(kx) \cdot e^{-k^2 Dt}$, za svaku realnu konstantu $k$.
(iii) Za svaku realnu konstantu $A$, uz uvjet $t > 0$, rješenje je i

$$u(x,t) = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{4}$$

(iv) $u(x,t) = e^{\frac{x}{\sqrt{D}}+t}$, ili, još općenitije, $u(x,t) = e^{\frac{kx}{\sqrt{D}}+k^2 t}$, za svaku realnu konstantu $k$.
(v) Kako god izabrali nekoliko rješenja gornjih oblika $u_1, u_2, ..., u_m$ i kako god izabrali realne brojeve $a_1, a_2, ..., a_m$ onda je funkcija $a_1 u_1 + a_2 u_2 + ... + a_m u_m$ reješenje od (1) za svaku realnu konstantu $A$. Takodjer, iz svakoga rješenja $u(x,t)$ može se generirati beskonačno mnogo novih rješenja oblika $v(x,t) = \gamma u(x,t) + \alpha x + \beta$ za svake tri realne konstante $\alpha, \beta, \gamma$. Naime, vrijedi $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$ i $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

# 3 Izvod jednodimenzijske difuzijske jednadžbe

Medjukorak u izvodu je Fickov prvi zakon koji povezuje gustoću $u(x,t)$ s tokom $F(x,t)$ kroz presjek okomit na $x$-os (koji ima stalnu površinu $S$). Intuitivno, **tok** je količina difuzijske tvari koja prodje kroz jedinicu površine u jedinici vremena i mjeri se u $kg/m^2 s$ (kilogram po metru na kvadrat puta sekunda, ili analogno, ovisno o izboru jedinica). To je prosječan tok dok je $F(x,t)$ tok na položaju $x$ (odnosno cijelom presjeku $S$ okomitom na $x$) u trenutku $t$, a smisao je da je količina tvari koja prodje kroz $S$ u malom vremenskom intervalu $\Delta t$ počevši od trenutka $t$, približno jednaka $F(x,t) S \Delta t$ (oznaka $S$ koristit će se i za taj presjek i za njegovu površinu). Ako zamislimo da se na položaju $x$ u trenutku $t$ protok odvija od lijeva na desno (tj. $F(x,t) > 0$), onda je to uzrokovano time što je koncentracija lijevo od presjeka $S$ veća od one desno, tj. $\Delta_x u(x,t) = u(x+\Delta x) - u(x,t) < 0$, što znači da je brzina od $u(x,t)$ s obzirom na $x$ negativna (oznaka $\Delta_x$ podsjeća nas na to da se gleda prirast s obzirom na promjenu od $x$, dok je vremenski trenutak fiksiran). Intuitivno je prihvatljvo da je količina tvari koja prodje kroz $S$ proporcionalna toj razlici, a takodjer da se gustoća desno od $x$ brže smanjuje što je protok kroz $S$ veći, što opravdava prvi Fickov zakon koji govori da je tok proporcionalan brzini promjene koncentracije (s obzirom na $x$), uz negativan koeficijent proporcionalnosti $-D$, tj.

$$F(x,t) = -D\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{5}$$

Treba imati na umu da ovo nije izvod već da je riječ o empirijskom zakonu, koji se u idealnim uvjetima potvrdjuje eksperimantalno. Za nastavak razmotrimo sljedeće činjenice:
$F(x,t)S\Delta t$ je približno masa koja prodje kroz presjek $S$ koji je okomit na $x$ za $\Delta t$ vremena počevši u trenutku $t$.
$F(x+\Delta x,t)S\Delta t$ ima analogno značenje samo je $S$ okomit na $x+\Delta x$.
$u(x,t)S\Delta x$ je približno masa unutar dijela cijevi od $x$ do $x+\Delta x$ u trenutku $t$.
$u(x,t+\Delta t)S\Delta x$ ima analogno značenje samo u trenutku $t+\Delta t$.
Zato oba izraza $(u(x,t+\Delta t)-u(x,t))S\Delta x$ i $(F(x,t)-F(x+\Delta x,t))S\Delta t$ imaju približno značenje promjene mase na položaju od $x$ do $x+\Delta x$ u vremenu od $t$ do $t+\Delta t$, tj.

$$(u(x,t+\Delta t)-u(x,t))S\Delta x + (F(x+\Delta x,t)-F(x,t))S\Delta t \approx 0$$

Odavde se, dijeleći s $S$, $\Delta x$ i $\Delta t$ te prelaskom na limes opravdava formula

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

što se katkad naziva Fickov drugi zakon, makar je uobičajeno Fickovim drugim zakonom nazivati (1) koja se dobije kombiniranjem (5) i (6) (jednadžba (5) derivira se po $x$ pa se $\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$ zamijeni s $-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$). Pri deriviranju se iskoristi da je $D$ konstanta. Toplinska jednadžba izvede se analogno, samo što se Fickov zakon zamijeni s Fourierovim zakonom.

## 4 Fizikalna interpretacija rješenja (4) za $A > 0$

Zamislimo da je u $t = 0$ u položaj $x = 0$ (ishodište) postavljena količina $M$ difuzijske tvari, koja se za $t > 0$ počinje širiti simetrično lijevo i desno od ishodišta. Uz pretpostavku da je cijev jako duga, ovo se matematički modelira tako da $x$ poprima sve realne vrijednosti od $-\infty$ do $+\infty$. Tada (4) uvjerljivo opisuje to širenje. Ako je tako, onda ukupna količina tvari (koja stalno ostaje $M$), prema definiciji funkcije gustoće, treba za svaki $t > 0$ biti površina ispod grafa funkcije gustoće pomnožena s površinom presjeka $S$ (prema dogovoru iz Upozorenja (ii) iz Uvoda) , tj. $M = S\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx =$

$S\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}dx = 2SA\sqrt{\pi D}$, za sve $t > 0$ (što se lako dobije korištenjem prikladnog kompjutorskog paketa). Radi jednostavnosti, označimo $\overline{M} = \frac{M}{S}$. Sad se dobije $A = \frac{\overline{M}}{2\sqrt{\pi D}}$, tj.

$$u(x,t) = \frac{\overline{M}}{2\sqrt{\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{7}$$

Tom je formulom zadana familija krivulja bliskih Gaussovim krivuljama (sl. 3). Radi jednostavnosti stavimo $\overline{M} = 1$. Tada je za svaki $t > 0$ ovom formulom zadana funkcija gustoće normalne razdiobe s očekivanjem 0 (simetrija oko ishodišta) i varijancom $4Dt$, tj. standardnom devijacijom $2\sqrt{Dt}$. Standardna devijacija se mijenja vremenom, što je $t$ veće, veća je i standardna devijacija, pa je krivulja spljoštenija, što odgovara činjenici da se vremenom difuzijska tvar širi (ali zato se koncentracija na fiksiranom položaju $x$ smanjuje). Posebno, prema pravilu *tri sigma*, gotovo sva difuzijska tvar (nje 99.73% ) nalazi se u intervalu $< -6\sqrt{Dt}, 6\sqrt{Dt} >$. Dakle, iako se u matematičkom modelu difuzijska tvar proteže od $-\infty$ do $+\infty$ za svaki konkretan $t > 0$, ipak u svakom trenutku nema gotovo ni jedna čestica izvan ovog konačnog intervala. Ako je $\overline{M}$ bilo koji pozitivan broj, a ne 1, onda je sve slično, samo što se svaka vrijednost funkcije množi s $\overline{M}$, dok se interval *tri sigma* ne mijenja (sl. 4).
Rješenje (7) može se interpretirati tako da se za svaki fiksirani $x$ razmatra kako se izraz mijenja promjenom vremena (što odgovara promjeni koncentracije vremenom na stalnom položaju u cijevi). Na primjer, stavljajući $x = 0$, može se precizirati kako ovaj model predvidja pad koncentracije u ishodištu, naime da je obrnuto proporcionalan drugom korijenu iz proteklog vremena (preciznije, da je umnožak koncentracije u ishodištu i drugog korijena iz proteklog vremena stalan i jednak $\frac{\overline{M}}{2\sqrt{\pi D}}$). I za druge $x$, a ne samo za $x = 0$ koncentracija opada vremenom, ali je zakon opadanja nešto složeniji.

## 4.1 Vjerojatnosna interpretacija rješenja

Rješenje (4) može se objasniti vjerojatnosno, razmatrajući difuziju kao slučajno gibanje čestica (prema uzoru na Einsteinov pristup iz 1905.). Jedan od najjednostavnijih takvih modela zasniva se na ovim dvjema pretpostavkama.
(i) Zanemaruje se gibanje čestica osim u smjeru $x$-osi.
(ii) Postoji (mali) vremenski interval $\Delta t$ i (mali) $\Delta x > 0$, tako da uočena čestica na (bilo kojem) položaju $x$, u vremenskom intervalu $\Delta t$ napravi horizontalni pomak za $\Delta x$ lijevo ili desno, svaki od njih s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$.

Uočimo presjek $S$ na položaju $x$, i djelove cijevi lijevo i desno od tog presjeka, svaki duljine $\Delta x$ i sve u fiksiranom trenutku $t$. Neka $u_l$ označava koncentraciju tvari u lijevom, a $u_d$ u desnom dijelu (sl. 5). Tada se $u_d - u_l$ može interpretirati približno kao prirast koncentracije $u(x,t)$ od $x$ do $x+\Delta x$ (pri fiksiranom trenutku $t$). Iz (i) i (ii) slijedi da za difuzijski koeficijent $D$ vrijedi

$$D \approx \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \tag{8}$$

(što je u skladu s tim da je dimenzija od $D$ površina po vremenu). Naime, u vremenskom intervalu $\Delta t$ odprilike pola čestica lijevo od $S$ prijeći će na desno, a pola onih desno prijeći će na lijevo. Stoga je količina protoka u tom vremenskom intervalu približno jednaka $\frac{u_l-u_d}{2}S\Delta x$. S druge strane, ta je količina približno jednaka $F(x,t)S\Delta t$. Zato je $F(x,t) \approx -\frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{u_d-l_l}{\Delta x} = -\frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{\Delta_x u(x,t)}{\Delta x}$. Odavde, očitavajući Fickov zakon (5) dobije se (8).

Sad razmotrimo slučajno odabranu česticu (odabranu na početku, dok je bila u ishodištu, tako da su sve čestice ravnopravne). Za (dovoljno) velik prirodan broj $n$ gledamo u kojem će se položaju ta čestica naći nakon $n$ takvih vremenskih intervala, tj. nakon vremena $t = n\Delta t$. Taj je položaj slučajan, a intuitivno je jasno da će za veliki broj čestica u prosjeku taj položaj biti u ishodištu (jer će u prosjeku biti jednako pomaka ulijevo kao i udesno). Sve se može simulirati kompjutorski na osnovi sljedeće vjerojatnosne interpretacije. Neka slučajna varijabla $X_0$ postiže vrijednosti $-\Delta x$ ili $\Delta x$, obje s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ (jednolika razdioba), neka su $X_1, X_2, ..., X_n$ nezavisne slučajne varijable jednako distribuirane kao i $X_0$ i neka je $X(n)$ slučajna varijable definirana kao $X(n) = X_1 + X_2 + ...X_n$. Tada je položaj čestice nakon $n$ vremenskih intervala $\Delta t$ slučajna vrijednost od $X(n)$, tj. vrijednost $x_1 + x_2 + ... + x_n$ gdje je svaki od $x_i$ slučajno izabran da bude ravnopravno $-\Delta x$ ili $\Delta x$. Taj zbroj je onda izmedju $-n\Delta x$ i $n\Delta x$ ali je mala vjerojatnost da će biti na rubovima tog intervala, a puno veća da će biti oko nule (jer se pozitivni i negativni pomaci poništavaju). Ovo se može reći puno preciznije: strogo matematički se može dokazati (Centralni granični teorem) da $X(n)$ za velike $n$ i male $\Delta x$, približno ima normalnu razdiobu s očekivanjem 0 i varijancom $n(\Delta x)^2$. Naime, $X_0$ (pa zato i svaki $X_i$) ima očekivanje 0 i varijancu $(\Delta x)^2$. Sad zaključak slijedi iz toga što je očekivanje zbroja jednako zbroju očekivanja uvijek, a isto vrijedi i za varijancu (uz uvjet da su pojedine slučajne varijable nezavisne, što je u ovom slučaju zadovoljeno). Koristeći zamjenu $t = n\Delta t$ i (8) vidimo da je $n(\Delta x)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \cdot n\Delta t = 2Dt$. Drugim riječima, položaj u trenutku $t$ čestice (slučajno odabrane na početku) je (približno) slučajna vrijednost normalne razdiobe s očekivanjem 0 i varijancom $2Dt$ (tj. sa standardnom devijacijom $\sqrt{2Dt}$). Ta razdioba ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$\phi_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{9}$$

Ovo se interpretira tako da je vjerojatnost da slučajno odabrana čestica u trenutku $t$ bude u malom intervalu od $x$ do $x + \Delta x$, približno jednaka $\phi_t(x)\Delta x$. Drukčije rečeno, vjerojatnost da slučajno odabrana čestica bude u trenutku $t$ u intervalu $a \leq x \leq b$, u ovom je modelu jednaka $\int_a^b \phi_t(x)dx$ (sl. 6). U skladu s tim, od ukupno $N$ čestica na početku, prema ovome modelu, očekuje se da će ih se u trenutku $t$ njih $N \int_a^b \phi_t(x)dx$ naći u intervalu $[a, b]$. Ova vjerojatnosna interpretacija, u prijevodu na determinističku, znači da je gustoća $u(x, t)$ proporcionalna $\phi_t(x)$ za svaki $t$, uz stalni koeficijent proporcionalnosti, pa, zbog sačuvanja ukupne količine difuzijske tvari, $u(x, t)$ treba biti kao u (7).

# 5 Početni i rubni uvjeti

Vidjeli smo da difuzijska jednadžba (1) ima puno medjusobno bitno različitih rješenja. S druge strane, konkretan inženjerski problem bi trebao imati jedinstveno rješenje. To znači da bi, za svaki konkretan problem, toj jednadžbi trebalo dodati druge uvjete. Ti se uvjeti dijele u dvije skupine: na početne i na rubne uvjete. Početni uvjet opisuje stanje na početku, za $t = 0$ (neposredno prije nego je proces započeo), a rubni uvjeti opisuju stanje na rubovima područja u kojemu se razmatra jednadžba odnosno u kojemu se proces odvija (jer je područje izolirano osim na rubovima). Za jednodimenzijsku difuzijsku jednadžbu to su uvjeti na stanje na krajevima cjevčice unutar koje se odvija difuzija. Neka je, na primjer, cjevčica postavljena tako da je reprezentirana segmentom $[L_1, L_2]$ na $x$-osi. Tada je, općenito:
**Početni uvjet.** $u(x, 0) = f(x)$ za sve $x$ izmedju $L_1$ i $L_2$, tj. $L_1 < x < L_2$, gdje je $f$ neka (razumna) funkcija.
Rubnih uvjeta ima više vrsta, a najčešći su Dirichletovi.
**Dirichletovi rubni uvjeti.** $u(L_1, t) = a(t)$ i $u(L_2, t) = b(t)$, za sve $t > 0$, gdje su $a(t), b(t)$ funkcije ovisne o $t$.
Ako je $a(t) = b(t) = 0$ za sve $t > 0$, uvjeti se nazivaju homogenim, inače su nehomogeni.
Za općenite Dirichletove uvjete difuzijska se jednadžba može rijesiti samo približno korištenjem prikladnih numeričkih metoda, a za neke posebne može se riješiti egzaktno, ali i tada je rješenje u pravilu dano u obliku beskonačnog

reda (Fourierov red).
Za difuzijski problem, jedni od najprirodnijih, a onda i najvažnijih početnih i rubnih uvjeta jesu

$$(i)\ u(x,0)=c,\ \text{za}\ -L<x<L,\ (ii)\ u(-L,t)=a,\ u(L,t)=b,\ t>0,\ (10)$$

gdje su $a, b, c$ konstante.

## 6 Egzaktno rješenje uz početne i rubne uvjete (10)

Ovi uvjeti odgovaraju cijevi duljine $2L$ dobro izolirane osim na rubovima gdje je cijev otvorena. Na početku je koncentracija u cijevi jednaka $c$ (uključujući i $c = 0$, što znači da nema difuzijske tvari), a nakon toga se lijevi otvor stalno održava na gustoći $a$, a desni na gustoći $b$ (gdje su $a, b$ neki pozitivni brojevi i eventualno 0). Intuitivno je jasno da će nakon dovoljno velikog vremenskog intervala proces praktično završiti kada će koncentracija biti linearno rasporedjena izmedju vrijednosti $a$ i $b$. Na primjer, ako je $a < b$ onda će se u ravnoteži koncentracija u cijevi jednoliko povećavati od vrijednosti $a$ do vrijednosti $b$, a ako je $b = a$ onda će ravnoteža nastati kad svugdje unutar cijevi bude koncentracija $a$. Problem je preciznijeg opisa kako će se proces odvijati u vremenu, tj. odredjivanja funkcije $u(x,t)$. Drugim riječima, problem je odredjivanje koncentracije difuzijske tvari u svakom trenutku i u svakom dijelu cijevi, posebno odredjivanje vremena kada će (praktično) doći do ravnoteže. U praksi bi se to odredjivalo pokusom (tj. nizom mjerenja u različitim vremenima i na različitim položajima unutar cijevi). Ovdje je riječ o tome koliko se to može vjerno opisati ovim matematičkim modelom. Ovakav (matematički) problem može se riješiti egzaktno, čak i ako je početni uvjet općenit, tj. ako je u (i) $u(x,0) = f(x)$, funkcija, umjesto $u(x,0) = c$, konstanta. Na primjer, može se koristiti pristup kao kod rješavanja toplinske jednadžbe u **Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 10th Edition, Wiley 2011**
`http://instructor.sdu.edu.kz/~merey/Advanced%20Engineering%20Mathematics%2010th%20Edition.pdf`.

Ovdje će se demonstrirati rješenje u slučaju $b = a$. Iako bi se sve moglo provesti izravno, poslužit ćemo se rješenjem u vrlo specijalnom obliku koji je dobro poznat u literaturi, a ima i u klasičnoj knjizi **J. Crank, The Mathematics of Diffusion, Second Edition, 1975**
`http://www-eng.lbl.gov/~shuman/NEXT/MATERIALS&COMPONENTS/Xe_damage/Crank-The-Mathematics-of-Diffusion.pdf`.

Tamo je (uz nešto drukčije oznake: $u(x,t)$ se označava kao $C(x,t)$ (što aludira na koncentraciju), a cijev je smještena na interalu $0 \leq x \leq l$, dano rješenje uz rubne uvjete
(A) $u(0,t) = u(l,t) = 0$, za $t > 0$, (to je tamo relacija (2.26)) i početni uvjet
(B) $u(x,0) = u_0$, za $0 < x < l$, (to je tamo relacija (2.27).
Rješenje je dano u obliku beskonačnog reda relacijom (2.31):

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-D(2n+1)^2(\frac{\pi}{l})^2 t} \cdot \sin((2n+1)\frac{\pi}{l}x) \qquad (11)$$

Pokazat ćemo kako se iz tog specijalnog rješenja može dobiti rješenje od (10) za $b = a$. Najprije analizirajmo to rješenje. Napišimo nekoliko prvih članova:

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}(e^{-D(\frac{\pi}{l})^2 t} \cdot \sin(\frac{\pi}{l}x) + e^{-9D(\frac{\pi}{l})^2 t} \cdot \sin(\frac{3\pi}{l}x) + e^{-25D(\frac{\pi}{l})^2 t} \cdot \sin(\frac{5\pi}{l}x) + ...)$$

Vidi se da su pribrojnici u izrazu umnošci eksponencijalnog dijela koji ovisi o $t$ i sinusnog dijela koji obvisi o $x$. Eksponencijalni je dio pozitivan, manji od 1 i sve brže ide prema nuli, dok je sinusni dio izmedju $-1$ i 1. Zato se rješenje može dobro aprooksimirati samo s nekoliko početnih članova zbroja. Takodjer, vidi se da svaki pribrojnik zadovoljava jednadžbu difuzije (1) pa tako i cijeli zbroj. Takodjer, svaki pribrojnik zadovoljava rubne uvjete (jer sinusi na rubovima imaju vrijednost 0). Pojedini pribrojnici ne zadovoljavaju početni uvjet, ali može se pokazati da cijela suma zadovoljava.
Prijelaz od uvjeta (A) i (B) do onih u (10) provodi se u dva koraka.
**Prvi korak.** Prijelaz od intervala $0 \leq x \leq l$ na interval $-L \leq x \leq L$.
Ako je $0 \leq x \leq l$ onda je $-L \leq x - L \leq L$, gdje je $l = 2L$. Zato, da bi se dobilo rješenje od (1) uz rubne i početne uvjete
(A') $u(-L,t) = u(L,t) = 0$, za $t > 0$,
(B') $u(x,0) = u_0$, za $-L < x < L$,
u rješenju (11) treba staviti $2L$ umjesto $l$ i $x + L$ umjesto $x$. Dobije se

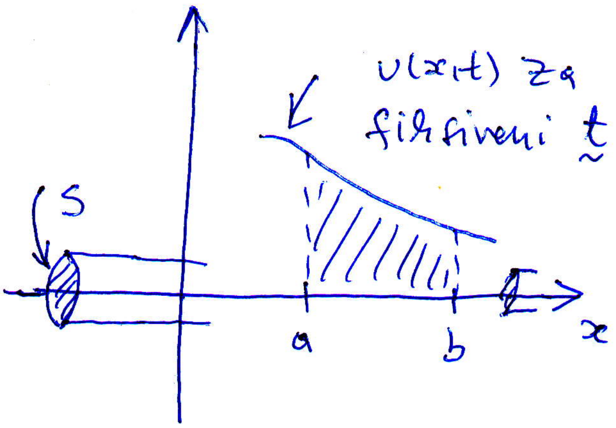
$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} e^{-D(2n+1)^2(\frac{\pi}{2L})^2 t} \cdot \cos((2n+1)\frac{\pi}{2L}x) \qquad (12)$$

Naime $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2L}(x+L)) = (-1)^n \cos((2n+1)\frac{\pi}{2L}x)$ (provjeriti računalno).
**Prijelaz od uvjeta (A') i (B') na uvjete** (10) **uz** $b = a$. Kakvo god bilo rješenje $u(x,t)$ od (1) onda je i $\alpha u(x,t) + \beta$ rješenje za svaka dva realna broja $\alpha, \beta$. Zato za rješenje (12) treba izabrati $\alpha, \beta$ tako da bude $\alpha u(-L,t) + \beta = \alpha u(L,t) + \beta = a$ i $\alpha u(x,0) + \beta = c$, tj. $\beta = a$ i $\alpha u_0 + \beta = c$,

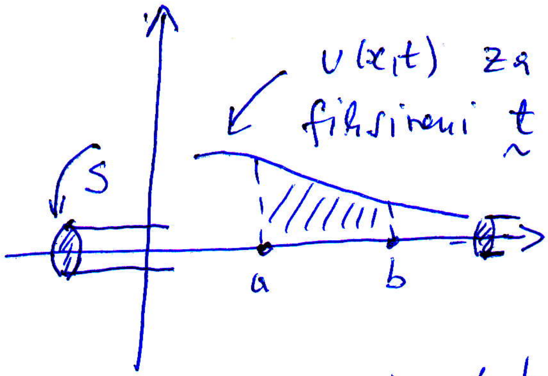
odakle se dobije $\alpha = \frac{c-a}{u_0}$. Zato rješenje (12) treba pomnožiti s $\frac{c-a}{u_0}$ i tome dodati $a$. Dobije se

$$u(x,t) = a + \frac{4(c-a)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} e^{-D(2n+1)^2(\frac{\pi}{2L})^2 t} \cdot \cos((2n+1)\frac{\pi}{2L}x) \tag{13}$$

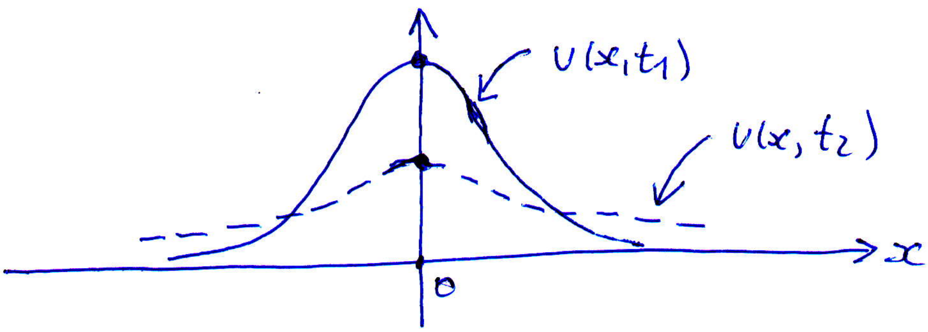
To je rješenje od (1) uz uvjete (10), pri $b = a$ (vidi se da u formuli nema $u_0$, što je i logično).



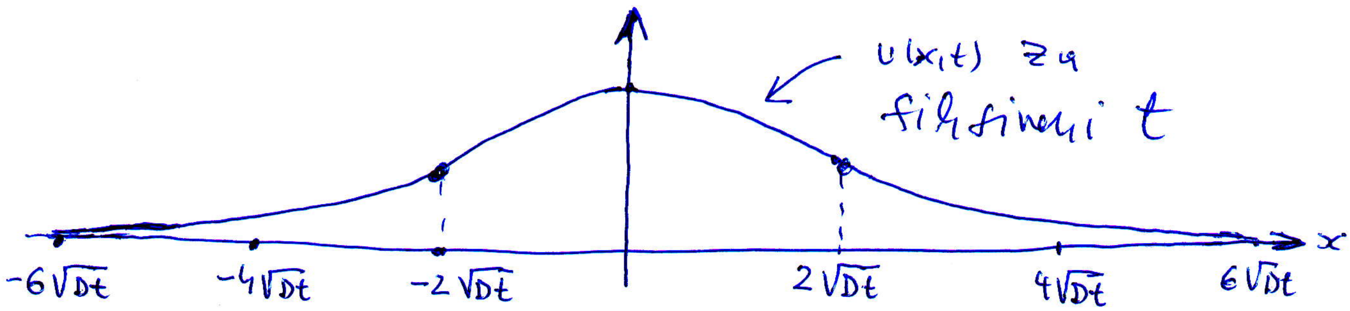

Sl. 1. masa od a do b $= \int_a^b u(x,t)\,dx$



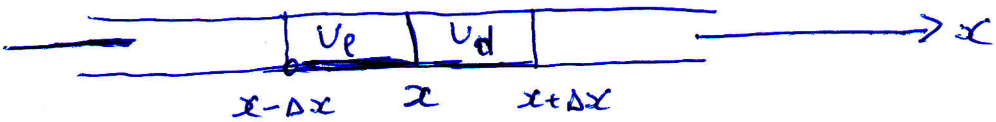

Sl. 2. masa od a do b $= S \cdot \int_a^b u(x,t)\,dx$



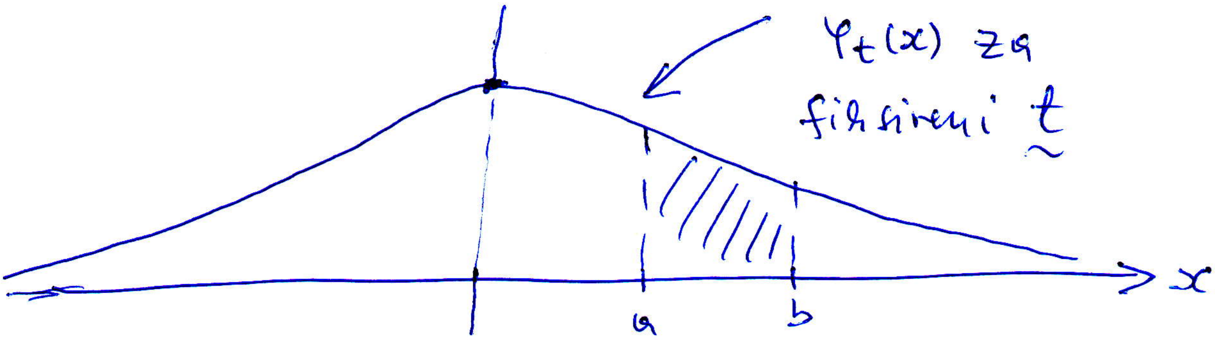

Sl. 3. $u(x,t_1)$ i $u(x,t_2)$ za $t_1 < t_2$



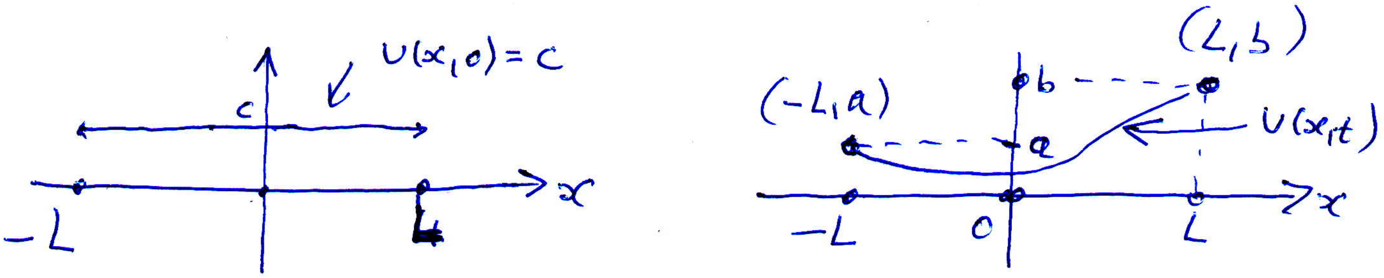

Sl. 4. Pravilo $3\sigma$




Sl. 5




Sl. 6. Vjerojatnost da slučajno odabrana čestica u trenutku $t$ bude između $a$ i $b$ : $\int_a^b \varphi_t(x)\,dx$




Početni uvjet: $t=0$ **Sl. 7** Rubni uvjeti: $x=\pm L$